TOP 03

UN THÉORÈME D'ABEL ET APPLICATIONS.

Les fichiers TOP sont réservées aux étudiants qui préparent le Top 5. Ils sont plus difficiles et demandent déjà une bonne maîtrise du reste du programme (cours, exercices, TD et méthodes). Même si le contenu de ces exercices dépasse le cadre du programme de ECG2, ils peuvent inspirer une série de questions d'un texte de concours.

Cet exercice concerne le chapitre 03 (séries).

Exercice 1.- **1. Un théorème d'Abel.** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. On note

$$S_N = \sum_{k=0}^{N} a_k b_k \quad \text{et} \quad B_N = \sum_{k=0}^{N} b_k$$

a. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)\, b_k = (a_n b_n - a_0 b_0) - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}(b_{k+1} - b_k).$$

Indication : Écrire pour tout k, $a_{k+1}b_{k+1} - a_k b_k = a_{k+1}(b_{k+1} - b_k) + (a_{k+1} - a_k)b_k$ puis sommer.

b. Montrer alors que

$$S_N = a_N B_N - \sum_{k=0}^{N-1} B_k (a_{k+1} - a_k).$$

Ce résultat est connu sous le nom de Lemme d'Abel.

c. À quelle opération de calcul intégral cette astuce vous fait-elle penser ?

d. On suppose que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, que la série de terme $(a_{n+1} - a_n)$ est absolument convergente et que $(B_n)_{n\in N}$ est une suite bornée. Montrer que la série de terme général $a_n b_n$ est convergente.

C'est le théorème d'Abel. Il existe bien d'autres versions de ce théorème qui utilisent toutes la même technique. Il ne faut pas se souvenir de l'énoncé mais plutôt de la stratégie.

2. Applications.

a. Montrer que le critère des séries alternées est un cas particulier du théorème d'Abel : si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de limite nulle, alors $\sum (-1)^n a_n$ converge.

b. Montrer que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente.

Pour que cet exercice soit profitable, il n'est pas recommandé d'utiliser la correction trop tôt. La *recherche* de la solution a beaucoup plus d'intérêt que la solution elle-même.

Correction 1.- **1. a.** Comme indiqué, on part de la formule

$$a_{k+1}b_{k+1} - a_k b_k = a_{k+1}(b_{k+1} - b_k) + (a_{k+1} - a_k)b_k$$

que l'on somme. La somme de gauche est télescopique et on a

$$\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}b_{k+1} - a_k b_k) = a_n b_n - a_0 b_0.$$

La formule de l'énoncé s'en déduit.

b. On a

$$S_N = \sum_{k=0}^{N} a_k b_k = \sum_{k=0}^{N} a_k(B_k - B_{k-1})$$

et on applique à cette somme le résultat précédent. Il vient

$$S_N = a_N B_N - a_0 B_0 - \sum_{k=0}^{N} B_{k-1}(a_k - a_{k-1})$$

avec la convention que $B_{-1} = 0$. On fait maintenant un changement d'indices. On obtient

$$S_N = a_N B_N - \sum_{k=0}^{N-1} B_k(a_{k+1} - a_k),$$

ce qu'on voulait (remarquer que $B_0 = 0$).

c. On vient en fait de faire "une intégration par parties" discrète (ou une sommation par parties). En effet la suite $(B_{n+1} - B_n)$ représente la "dérivée" de la suite (B_n). L'expression

$$S_N = \sum_{k=0}^{N} a_k(B_k - B_{k-1})$$

représente donc le produit d'une suite par "sa dérivée". Dans l'expression finale

$$S_N = a_N B_N - \sum_{k=0}^{N-1} B_k(a_{k+1} - a_k),$$

il y a la partie toute intégrée $a_N b_N$ et la partie $-\sum_{k=0}^{N-1} B_k(a_{k+1} - a_k)$ sur laquelle on a fait basculé la dérivée sur la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Bien sûr, il s'agit seulement d'une analogie et cet argument n'a pas vocation a être rigoureux.

d. nous allons montrer que dans l'expression

$$S_N = a_N B_N - \sum_{k=0}^{N-1} B_k(a_{k+1} - a_k),$$

S_N apparaît comme la somme de deux suites convergentes. La première $(a_N b_N)_N$ est le produit d'une suite qui tend vers 0 et d'une suite bornée, elle converge donc (vers 0). La seconde

$$-\sum_{k=0}^{N-1} B_k(a_{k+1} - a_k)$$

est bien une série convergente puisque, si M est un majorant de la suite (B_N), on a

$$\left| -\sum_{k=0}^{N-1} B_k(a_{k+1} - a_k) \right| \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} M\,|a_{k+1} - a_k| = M \sum_{k=0}^{N-1} |a_{k+1} - a_k|$$

qui est convergente.

2. **a.** Vérifions qu'on peut appliquer le théorème d'Abel avec $b_n = (-1)^n$ et a_n. La suite des sommes partielles de b_n prend alternativement les valeurs 1 et 0 (selon si N est pair ou impair), elle est donc bornée. Quand à la série de terme général $|a_{k+1} - a_k| = a_k - a_{k+1}$ (puisque $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante), c'est une série télescopique qui est de même nature que la suite $(-a_n)_n$ donc converge vers 0.

b. On est dans le cas où on peut directement appliquer le théorème des séries alternées.